

# El de los convexos

Quimey Vivas

17 de agosto de 2007

**Lema 1** Sean  $x_1, \dots, x_{n+2} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces existe una partición no trivial  $I, J$  de  $\{1, \dots, n+2\}$  tal que  $\text{conv}\{x_i\}_{i \in I} \cap \text{conv}\{x_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$

Demostración: Consideremos  $\{x_i - x_1\}_{i \geq 2}$  son  $n+1$  puntos en  $\mathbb{R}^n$  luego son linealmente dependientes, i.e.,  $\exists \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$  no todos nulos tal que

$$\sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i (x_i - x_1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i x_i - \sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i x_1 = 0$$

Si llamamos  $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i$  tenemos una combinación lineal nula de los  $x_i$  cuyos coeficientes suman 0 y no son todos 0 (hasta aquí demostramos que  $n+2$  puntos en  $\mathbb{R}^n$  son afinmente dependientes, ver [2] o [3]). Tomemos  $I = \{i : \lambda_i \leq 0\}$ ,  $J = \{i : \lambda_i > 0\}$ ,  $M = \sum_{i \in I} \lambda_i$ . Se tiene lo buscado:

$$\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{M} x_i = \sum_{i \in J} \left( \frac{-\lambda_i}{M} \right) x_i$$

**Definición 2** Dada una familia  $\{E_i\}_{i \in I}$  de conjuntos en  $\mathbb{R}^n$  diremos que tienen la propiedad  $PI(n+1)$  si cualquier subfamilia de  $n+1$  conjuntos tiene intersección no vacía.

**Proposición 3** Sean  $E_1, \dots, E_r \subseteq \mathbb{R}^n$  convexos con la  $PI(n+1)$ . Entonces:

$$\bigcap_{i=1}^r E_i \neq \emptyset$$

Demostración: Por inducción en  $r$ : Si  $r=n+2$  para cada  $j \leq n+2$  tomo  $x_j \in \bigcap_{i \neq j} E_i$  (que es no vacía por hipótesis) por el lema 1 tenemos  $I, J$  tales que  $\exists x \in \text{conv}\{x_i\}_{i \in I} \cap \text{conv}\{x_j\}_{j \in J}$ . Afirmando que  $x \in \bigcap_{i=1}^r E_i$ . Pues si  $i \in I \Rightarrow x \in \text{conv}\{x_j\}_{j \in J} \subseteq E_i$  y si  $i \in J$  es algo análogo. Si  $r < n+2$  considero  $\{E_i \cap E_r\}_{i < r}$  familia que tiene la  $PI(n+1)$  por el caso  $r=n+2$ , por hipótesis inductiva estos conjuntos tienen intersección no vacía.

**Teorema 4** Sea  $\{E_i\}_{i \in I}$  una familia de convexos cerrados en  $\mathbb{R}^n$  con la  $PI(n+1)$  tal que alguno de los convexos es acotado. Entonces

$$\bigcap_{i \in I} E_i \neq \emptyset$$

Demostración: Supongamos que  $E_a$  es acotado, por la prop. 3 con  $r=n+2$  la familia  $\{E_i \cap E_a\}_{i \in I}$  es una familia de compactos convexos con la PI( $n+1$ ). Por la prop. 3 esta nueva familia de compactos tiene la PIF (propiedad de intersección finita, ver [1] p.192) .Luego la intersección de todos es no vacía:

$$\bigcap_{i \in I} E_i \neq \emptyset$$

## Referencias

- [1] J. Munkres: Topologia, Prentice Hall (2002)
- [2] A. Larotonda: Algebra lineal y geometra, Eudeba
- [3] Santaló: Geometra Proyectiva, Eudeba