

# Problemas de Algebra lineal

“Nous sommes du soleil...”<sup>1</sup>Ritual, Jon Anderson  
“All life is Problem Solving.”<sup>2</sup> Karl Popper

1. Si  $A, B \in M_n(K)$  son tales que  $AB = I_n$  entonces  $BA = I_n$ .
2. Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos y sean  $A_1, \dots, A_m$  subconjuntos propios de  $A$ , tales que cada par de elementos de  $A$  esta en exactamente un subconjunto  $A_i$ . Probar que  $m \geq n$ .
3. Si  $K_n$  se descompone en  $m$  grafos bipartitos completos entonces  $m \geq n - 1$ .
4. Supongamos que tenemos un rectangulo de lados  $a, b$ , que se lo puede cubrir con cuadrados que no se solapen y lo tapen exactamente. Probar que  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ .
5. Supongamos que tenemos 2 rectangulos  $R_1, R_2$  tales que se puede cortar a  $R_1$  en varios rectangulos y reacomodarlos (solo trasladandolos) para formar  $R_2$ . Si  $R_1$  tiene lados  $a_1, b_1$  y  $R_2$  tiene lados  $a_2, b_2$  probar que  $\frac{a_2}{a_1} \in \mathbb{Q}$ .
6. Decimos que un conjunto de  $2n + 1$  numeros reales tiene la propiedad  $P$  si al tachar cualquiera de sus elementos, se puede dividir a los restantes  $2n$  en 2 grupos con  $n$  elementos de forma que la suma en cada grupo sea la misma. Probar que si  $a_1, \dots, a_{2n+1}$  tienen la propiedad  $P$  entonces son todos iguales.
7. Probar que hay  $p^2$  soluciones de la ecuacion  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{p}$ .
8. Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ ,  $A = A^t$ . Probar que la diagonal esta contenida en el subespacio generado por las filas.
9. Sean  $A, B \in M_n(K)$ . Probar que  $\det (AB) = \det A \det B$ .

---

<sup>1</sup>Es una cancion de Yes de Tales From Topographic Oceans

<sup>2</sup>Nunca lei nada de Popper, pero semejante afirmacion me hace creer que tengo que ir a leerlo ya.

10. Sea  $A = \{a_{i,j}\}$  donde  $a_{i,j} = (i, j)$  (maximo comun divisor). Probar que  $\det A = \phi(1)\phi(2)\dots\phi(n)$ .
11. Sea  $T$  un arbol con vertices  $v_1, \dots, v_n$  y  $d_{i,j}$  = la distancia entre  $v_i$  y  $v_j$ . Probar que:
- $$\det (d_{i,j}) = -(-2)^{n-2} (n-1)$$
12. (Cayley) Probar que la cantidad de arboles en  $n$  vertices dados es  $n^{n-2}$ .
13. Sea  $f : \mathbb{Q}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{Q}^{m \times m}$ , de forma que  $f(A+B) = f(A) + f(B)$ ,  $f(AB) = f(A)f(B)$  y  $f(I_n) = I_m$ . Probar que  $n$  divide a  $m$ .
14. Dada una matriz, probar que la dimension del subespacio generado por las filas es la misma que la dimension del subespacio generado por las columnas.
15. (Cayley-Hamilton) Sea  $P(x) = \det(xI_n - A)$ , probar que  $P(A) = 0$ .
16. Toda matriz simetrica real es diagonalizable.
17. (Frobenius) Si  $A \in M_n(\mathbb{R}_{>0})$ , entonces  $A$  tiene un autovalor positivo.
18. Todo espacio vectorial tiene una base
19. Sea  $A = \{a_{i,j}\}$  donde  $a_{i,j} \leq 0$  si  $i \neq j$  y  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0$ . Probar que  $\det A > 0$ .
20. Sean  $A, B, C, D \in M_n(K)$  y  $P \in M_{2n}(K)$ , donde  $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ . Si  $A$  es invertible, probar que  $\det P = \det(AD - ACA^{-1}B)$ . Si  $AC = CA$  entonces  $\det P = \det(AD - BC)$ .
21. Sea  $W \subset M_n(K)$ ,  $W = \langle AB - BA \rangle, \forall A, B \in M_n(K)$ . Probar que  $W$  es el subespacio de matrices con traza nula.
22. Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y supongamos que  $a$  es un autovalor de  $A$ . Sea ademas  $q(x)$  un polinomio con coeficientes en  $K$ . Probar que  $q(a)$  es un autovalor de  $q(A)$ . Reciprocamente, si  $r$  es un autovalor de  $q(A)$  probar que  $r = q(a)$  para algun autovalor  $a$  de  $A$ .
23. Sea  $T \in M_n(K)$ , tal que existe  $v \in K^n$  con  $v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v$  linealmente independientes. Probar que  $ST = TS$  si y solo si  $S = P(T)$  para algun polinomio  $P$ . ¿Vale la vuelta?

24. Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$  hallar la dimension del subespacio de matrices que conmutan con  $A$ .
25. Si  $A \in M_n(\mathbb{C})$  entonces  $A \cong A^t$ .
26. Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$  tal que todo valor propio de  $A$  es real. Probar que  $A$  es semejante a una matriz real.
27. (Resultante) Sea  $f(x) = a_n X^n + \dots + a_0$  y  $g(x) = b_m X^m + \dots + b_0$ . Definimos:

$$Syl(f, g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix}$$

Y ponemos  $Res(f, g) = det(Syl(f, g))$  (se llama la resultante). Probar que  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen una raiz en comun si y solo si  $Res(f, g) = 0$ . (Notar que los coeficientes no necesariamente estan en  $\mathbb{R}$ , por ejemplo pueden ser polinomios en  $y$ ).

28. Sea  $F$  una familia de transformaciones lineales diagonalizables que conmutan. Probar que existe una base en donde todas las transformaciones tienen matriz diagonal.
29. Sea  $T : V \rightarrow V$  normal ( $TT^* = T^*T$ ), entonces  $V$  tiene una base ortonormal de vectores propios.
30. Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , probar que existe  $U$  con  $UU^* = I_n$  tal que  $UAU^{-1}$  es triangular superior.
31. Si  $A = A^*$ ,  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Son equivalentes:
- $x^*Ax > 0 \forall x \in \mathbb{C}^n$
  - $A = PP^*$ , con  $P$  inversible.
  - Todos los menores principales son positivos.

32. Sea  $(V, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado.  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ .  $g_{i,j} = \sum f(x_t)$  donde la suma es sobre todos los  $x_t$  con  $x_t \leq x_i$  y  $x_t \leq x_j$ . Probar que  $\det(g_{i,j}) = f(x_1) \dots f(x_n)$ .
33. Sean  $A_1, \dots, A_n$  conjuntos de variables,  $g_{i,j} = \sum x_t$  donde la suma es para todos los  $x_t \in A_i \cap A_j$ . Luego  $\det(g_{i,j}) = \sum$  productos de  $n$  variables distintas. (puede haber terminos restando, lo importante es que no aparecen terminos con variables repetidas).

34. Hallar los autovalores de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

35. Sea  $G$  un digrafo (con bucles).  $E(G) = e_1, \dots, e_m$ . Pongamos

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es el final de } e_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Sea  $A_0$  la matriz que se obtiene de la anterior al borrar una fila. Probar que la cantidad de spanning trees de  $G$  es  $\det(A_0 A_0^t)$ .

36. (Pfaffian) Sea  $A \in M_{2n}(K)$ ,  $A^t = -A$ . Sea  $\epsilon_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$  el signo de la permutacion  $(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n)$ . Definimos:

$$PF(A) = \sum \epsilon_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n} a_{i_1, j_1} a_{i_2, j_2} \dots a_{i_n, j_n}$$

Probar que  $PF(A)^2 = \det A$ .

37. Sea  $V$  el espacio vectorial de vectores  $(a_1, \dots, a_n)^t$  donde los  $a_i$  estan en un cuerpo  $K$ . Si  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$  entonces  $a^t b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ . Sea  $M$  un subespacio de  $V$  y  $A$  una transformacion lineal de  $V$ . Decidir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas:

- Si  $A$  es no singular, entonces  $A^t$  tambien lo es.
- Si  $A$  es no singular, entonces  $A^t A$  tambien lo es.

- $A$  y  $A^t A$  tienen el mismo nucleo.
  - $M \cap M^\perp = 0$
  - $\langle M \cup M^\perp \rangle = V$
  - $\dim M + \dim M^\perp = n$
  - $(M^\perp)^\perp = M$
38. Si  $S \subset \mathbb{Z}_2^n$ , luego  $(1, \dots, 1)^t \in \langle S \cup S^\perp \rangle$ .
39. Los vertices de un grafo  $G$  se pueden dividir en 2 clases  $V_1, V_2$  tales que
- Cada vertice tiene una cantidad par de vecinos en la misma clase.
  - Cada vertice en  $V_1$  tiene una cantidad par de vecinos en  $V_1$  y cada vertice en  $V_2$  tiene una cantidad impar de vecinos en  $V_2$ .
40. La descomposicion del problema anterior es unica si y solo si  $G$  tiene una cantidad impar de spanning trees.
41. (Lovasz) Dado un grafo  $G$ , la cantidad de Matchings es par si y solo si hay un subconjunto de vertices  $S$  de forma que cada vertice de  $G$  tenga una cantidad par de vecinos en  $S$  (Ayuda: Hacer primero el caso  $G$  bipartito).
42. (Formulas de Cauchy-Binet) Sea  $C \in M_n(K)$ ,  $A \in K^{n \times m}$ ,  $B \in K^{m \times n}$ ,  $C = AB$ . Supongamos que  $m \geq n$  y llamemos  $A(k_1, \dots, k_n)$  al menor de  $A$  que se obtiene con esas columnas y  $B(k_1, \dots, k_n)$  el menor de  $B$  que se obtiene de esas filas. Luego:
- $$\det C = \sum A(k_1, \dots, k_n)B(k_1, \dots, k_n)$$
- Donde la suma se extiende sobre todos los posibles  $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq m$ .
43. Si  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\dim V = k$  entonces  $|V \cap \{0, 1\}^n| \leq 2^k$ .
44. Sea  $A \in M_n(0, 1)$ . Tal que  $A + A^t = I_n$ . Probar que  $\text{Rg } A \geq n - 1$ .
45. Sean  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$  con  $A, C$  inversibles tales que  $A^k B = C^k D \forall k$ . Luego  $B = D$ .
46. Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  con todos los coeficientes impares. Probar que no es posible que todos los menores de una fila sean iguales.
47. Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Probar que existen  $x_1, \dots, x_n$  tales que  $x_i = 0$  o  $1$  y  $p \nmid \det(A + \text{diag}(x_1, \dots, x_n))$ .

48. (Desigualdad de Sylvester) Sea  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{n \times q}$ . Probar que

$$Rg A + Rg B - n \leq Rg AB \leq \min(Rg A, Rg B)$$

49. Sean  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , entonces  $Rank(AB) - Rank(BA) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

50. (Friendship Theorem) Supongamos que en un grupo de personas cualquier par de personas tiene exactamente 1 amigo en comun. Entonces hay una persona que conoce a todos.

51. (Producto de Kronecker) Sea  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{p \times q}$ .  $A \otimes B \in K^{mp \times nq}$ , donde:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$$

Probar que:

- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
- $(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1})$
- $Rg(A \otimes B) = Rg A Rg B$
- $(A \otimes B)^t = B^t \otimes A^t$

52. Probar que  $\det(A \otimes B) = \det(A)^b \det(B)^a$  y  $tr(A \otimes B) = tr A tr B$ . ¿Cuales son los autovalores de  $A \otimes B$  en funcion de los de  $A$  y los de  $B$ ?

53. Sea  $K$  un cuerpo con infinitos elementos. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Probar que  $V$  no se puede escribir como union de subespacios propios.

54. (Minkowski) Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Supongamos que todos los elementos de la matriz  $A - I_n$  son divisibles por  $m \geq 2$ , pero  $A \neq I_n$ . Entonces:

- Si  $m > 2$ , entonces  $A^q \neq I_n, \forall q$ .
- Si  $m = 2$  y  $A^2 \neq I_n$  entonces  $A^q \neq I_n, \forall q$ .

55. Sean  $E, F, G$  cuerpos, con  $E \subset F \subset G$ . Denotamos  $[H : K]$  la dimension de  $H$  como  $K$ -espacio vectorial. Probar que  $[G : E] = [G : F][F : E]$ .

56. (Folklore Popular) Sean  $p_1, \dots, p_n$   $n$  primos distintos. Probar que  $\dim \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) = 2^n$  (como  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial).

57. Sean  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$ . Probar que las unicas relaciones de la forma

$$a_1 b_1^{\frac{1}{n}} + a_2 b_2^{\frac{1}{n}} + \dots + a_m b_m^{\frac{1}{n}} = 0$$

son las triviales.

58. (Minkowski)  $GL(n, \mathbb{Q})$  contiene una cantidad finita de subgrupos finitos salvo isomorfismos.

59. Probar que  $SL(n, \mathbb{Z})$  esta generado por 2 elementos.

60. Un Block Design  $(v, b, k, r, l)$  es un arreglo de  $v$  elementos distintos en  $b$  bloques de forma que en cada bloque haya exactamente  $k$  elementos distintos y cada elemento este en  $r$  bloques. Ademas cada par de elementos distintos aparecen en  $l$  bloques exactamente. Probar:

- $bk = vr$
- $r(k - 1) = l(v - 1)$
- $b \geq v$  (desigualdad de Fisher)
- Si  $b = v$  el diseño se dice simetrico. Probar que en todo diseño simetrico, cualesquiera 2 bloques tienen exactamente  $l$  elementos en comun.
- Dado un diseño simetrico con  $v$  par, luego  $k - l$  es un cuadrado perfecto.

61. (Chasles) Sean  $C_1, C_2$  2 cubicas que se cortan en 9 puntos distintos (una cubica son los puntos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que verifican  $F(x, y) = 0$  donde  $F$  es un polinomio de grado 3 en  $x, y$ ). Entonces, cualquier cubica que pase por 8 de los puntos pasa tambien por el noveno.

62. Considere matrices reales cuadradas  $A, B, C$  de orden  $n$ , tales que  $A^3 = -I_n$ ,  $BA^2 + BA = C^6 + C + I_n$  y  $C$  es simetrica. Determine si es posible  $n = 2005$ .

63. Sea  $V \subset M_n(\mathbb{C})$ , subespacio de matrices nilpotentes. Probar que  $\dim V \leq \frac{n^2 - n}{2}$ .

64. Sean  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  definidas positivas. Probar que:

$$\frac{2^{n+1}}{\det(A + B)} \leq \frac{1}{\det A} + \frac{1}{\det B}$$

65. (Lovasz) Sean dados  $U_1, \dots, U_m, W_1, \dots, W_m$  subespacios de  $\mathbb{R}^{r+s}$  tales que:

- $\dim U_i = r$
- $\dim W_i = s$
- $U_i \cap W_i = \emptyset$
- $U_i \cap W_j \neq \emptyset$  si  $i < j$

Luego  $m \leq \binom{r+s}{s}$ .

66. Sea  $A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Probar que  $B^{e_1} A^{f_1} B^{e_2} A^{f_2} \dots B^{e_n} \neq I_n$ , donde  $e_i = 0$  o  $1$  y  $f_j = -1$  o  $1$ .

67. Sean  $v_1, \dots, v_n \in K^n$ , decimos que forman una base ortogonal si  $v_i^t v_j = 0$  si  $i \neq j$  y  $v_i^t v_i = 1, \forall i$ . Demostrar que si las columnas de una matriz forman una base ortonormal entonces sus filas tambien lo hacen.

68. (Burnside-Frattini) Sea  $G$  un grupo con  $|G| = p^n$ , donde  $p$  es primo. Probar que todos los sistemas de generadores minimales tienen el mismo cardinal. (Sugerencia: Considerar  $F(G) = \cap M$  donde la interseccion recorre todos los subgrupos maximales  $M \subset G$ .)

69. (Forma normal de Smith) Sea  $A$  un anillo,  $M \in M_n(A)$ . Decimos que  $M$  esta en forma normal si los elementos fuera de la diagonal son  $0$  y  $\forall i < j, M_{i,i} | M_{j,j}$ . Decimos que 2 matrices son equivalentes si se puede obtener una de la otra intercambiando filas o columnas y/o sumando y restando multiples de una fila a otra (o multiples de una columna a una columna). Probar que una matriz es equivalente a una matriz en forma normal si:

- $A = \mathbb{Z}$ .
- $A = \mathbb{Q}[x]$ .

70. (Unicidad Forma normal de Smith) Sea  $M \in M_n(\mathbb{Z})$  una matriz con forma normal  $diag(d_1, \dots, d_n)$ . Sea ademas  $\gamma_k(M) =$  maximo comun divisor de todos los menores de orden  $k$  de  $M$ . Probar que:

$$d_k = \frac{\gamma_k(M)}{\gamma_{k-1}(M)}$$

71. (H.B.Philips) Sea  $A_k \in M_n(K)$  tal que  $A_i A_j = A_j A_i$  para  $i \neq j$ . Sea  $P(x_1, \dots, x_m) = \det(A_1 x_1 + \dots + A_m x_m)$ . Por ultimo sean  $M_k \in M_n(K)$  tales que  $A_1 M_1 + \dots + A_m M_m = 0$ . Probar que  $P(M_1, \dots, M_m) = 0$ .
72. Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$  tal que  $\text{tr} A^m = 0, \forall m > 0$ . Probar que  $A$  es nilpotente.
73. (Teorema del Indice) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial con  $\dim V = n$  y  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simetrica. Sean  $E$  y  $F$  2 bases de  $V$  tales que  $\|\phi\|_E = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$  y  $\|\phi\|_F = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ . Probar que ambas matrices tienen la misma cantidad de 1 y la misma cantidad de  $-1$ .
74. (Farkas-Minkowski) Sean  $y_1, \dots, y_n, y \in \mathbb{R}^n$ .  $y = \sum a_i y_i$  con  $a_i \geq 0$  si y solo si para todo vector  $x$  tal que  $x y_i \geq 0$  verifica  $x y \geq 0$ .
75. (Konig-Birkhoff) Sea  $A \in M_n(\mathbb{R} \geq 0)$  tal que la suma en cada fila y en cada columna sea 1. Probar que  $A$  es combinacion lineal positiva de matrices de permutacion.

76. Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$  y definamos

$B \in M_{n^2}(\mathbb{R})$  como  $\begin{pmatrix} A & I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -I & -A & I & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I & A & I & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -I & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -I & A & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -I & -A \end{pmatrix}$ . Calcular

$\chi_B(x)$ .

77. Se tiene un tablero infinito con numeros reales en sus casillas. Se tienen ademas 2 figuras  $F_1$  y  $F_2$  compuestas por cuadrados unitario como los del tablero. Se sabe que para cualquier traslacion de  $F_1$ , la suma de los numeros en las casillas que tape sera no negativa. Probar que se puede trasladar a  $F_2$  de forma que la suma de los numeros de las casillas que tape sea no negativa.

78. Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z}_p)$  y supongamos que  $Per(A) \neq 0$ . Entonces para cualesquier  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{Z}_p$  existen  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{0, 1\}$  tales que  $\sum_j \epsilon_j a_{i,j} \neq c_i, \forall i$ .

79. (Cauchy) Sea  $C = \left\{ \frac{1}{a_i + b_j} \right\}_{i,j}$ . Calcular  $det C$ .

80. Sea  $v_1, \dots, v_n$  y  $w_1, \dots, w_n$  2 bases de  $K^n$ . Probar que  $\forall r$ ,  $r$  de los  $v_i$  se pueden cambiar por  $r$  de los  $w_j$  y seguir obteniendo una base.

81. Sean  $A_1, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$  matrices simetricas tales que  $A_1^2 + \dots + A_m^2 = 0$ . Probar que  $A_1 = \dots = A_m = 0$ .

82. Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $Rg A = 1$ . Probar que  $det (A + I_n) = 1 + Tr A$ .

83. Sean  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  tales que  $Tr A^m = Tr B^m, \forall m$ . Probar que  $A$  y  $B$  tienen los mismos autovalores.

84. Sean  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ , y sea:  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ & & \dots & & \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Probar que  $det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ . Donde  $\beta_k = \sum_{j=1}^n (\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n})^j a_j$ .

85. (Hadamard) Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $A = (a_{i,j})$  con  $H_r = a_{r,1}^2 + \dots + a_{r,n}^2$ . Demostrar que  $(det A)^2 \leq H_1 H_2 \dots H_n$ .

86. (Harazi) Sean  $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\|A\| = \max |a_{i,j}|$ . Probar que si

- $\|A_1^p + \dots + A_k^p\| \leq \frac{1}{p!}, \forall p$ , entonces  $A_1, \dots, A_k$  son nilpotentes.
- $\|A_1^p + \dots + A_k^p\| \leq k, \forall p$ , entonces  $|det A_i| \leq 1$ .

87. Sean  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  tales que  $A^2 + B^2 = AB$  y  $AB - BA$  es invertible. Probar que  $3|n$ .

88. Sea  $M$  una matriz con coeficientes que son variables y  $I_r =$  Ideal generado por todos los menores de orden  $r$ . Probar que  $I_r$  es un ideal primo para  $r = 2$  (de hecho es cierto para cualquier  $r$ ).

89. Sea  $X = \{(A, B) \in K^{n \times n}, AB = BA\}$ . Demostrar que  $X$  es una variedad algebraica irreducible. Calcular su dimension.

90. Sea  $N \subset K^{n \times n}$  el conjunto de matrices nilpotentes. Es un conjunto algebraico afin definido por la ecuacion matricial  $X^n = 0$ . Determinar su dimension.

91. Sea  $\alpha \in K^{n \times n}$  una matriz de Jordan. Denotemos  $J$  el conjunto de todas las matrices de Jordan. Para cada  $\alpha \in J$ , sea  $[\alpha] \subset K^{n \times n}$  de matrices semejantes a  $\alpha$ . El grupo  $G = GL(n, K)$  actúa en  $K^{n \times n}$  via  $g\alpha = g\alpha g^{-1}$  y  $[\alpha]$  es justamente la órbita de  $\alpha$ . La teoría de la forma de Jordan dice que  $K^{n \times n}$  es la unión disjunta de los  $[\alpha]$ .

- Denotemos  $|\alpha|$  la clausura Zariski de  $[\alpha]$ . Demostrar que  $|\alpha|$  es un conjunto algebraico afin irreducible.
- Determinar la dimensión de  $|\alpha|$  para cada  $\alpha$ .
- Demostrar que  $|\alpha|$  es una unión disjunta de conjuntos  $[\beta]$  para ciertos  $\beta \in J$ . ¿Cuales  $\beta$  aparecen?

92. (Frank Uhlig) Sean  $A, B \in M_n(K)$ . Si el polinomio característico de  $A$  es irreducible, probar que  $\text{Rg}(AB - BA) \neq 1$ .

### Aclaraciones

**Grafo Bipartito:** Un grafo cuyos vértices se pueden pintar con 2 colores de forma que no hay 2 vértices del mismo color conectados. El grafo se dice bipartito completo si cualesquiera 2 vértices de distinto color están unidos.

**Subgrafo:** Dado un grafo  $G$ , un subgrafo  $H$  es un grafo que está contenido en  $G$ , es decir que sus vértices y sus aristas son parte de  $G$ .

**Árbol:** Un árbol es un grafo conexo sin ciclos. Es decir un grafo tal que de cada vértice se puede llegar a cualquier otro vértice caminando por las aristas y de forma que no haya caminos cerrados. No es difícil ver que un árbol con  $n$  vértices tiene  $n - 1$  aristas y que para cualesquiera 2 vértices hay exactamente un camino que los une.

**Spanning Tree:** Dado un Grafo  $G$ , un spanning tree es un subgrafo que contiene a todos los vértices y es un árbol.

**Digrafo:** Es un grafo con aristas dirigidas. Un bucle en un Digrafo es una arista que conecta un vértice consigo mismo.

**Matching:** En un grafo  $G$ , un matching es un conjunto de aristas de forma que en conjunto toquen a cada vértice exactamente una vez.

**Menores principales:** Dada una matriz  $A \in K^{m \times n}$  su menor principal de orden  $k$  es el determinante de la matriz que se obtiene al borrar sus últimas  $m - k$  filas y las últimas  $n - k$  columnas.

**Conjunto parcialmente ordenado:** Es un conjunto  $V$  con un orden parcial " $<$ ". Es decir que si  $a, b, c \in V$  son tales que  $a < b$  y  $b < c$  entonces  $a < c$ . Notar que el orden no es total, es decir que dados  $a, b \in V$  no necesariamente  $a < b$  o  $b < a$ .